

Die Kontaktpunktproblematik in der Unfallrekonstruktion - Energie-Doppelring- und Drehimpuls-Spiegel-Verfahren

1991, pp. 259 - 263 (#9)

In der Unfallmechanik ist es üblich, die zeitlich ausgedehnte Kollision mit flächiger Berührung als Stoß unendlich kurzer Zeitdauer mit punktueller Berührung zu idealisieren. In dem vorliegenden Aufsatz wird der Einfluß dieser Idealisierung insbesondere bei der Anwendung des Drallsatzes auf die Fahrzeug-Fahrzeug-Kollision näher untersucht. Anschließend werden zwei neue Verfahren vorgestellt, die die Definition eines idealisierten Kontaktpunktes entbehrlich machen.

Considering crash-mechanics it is a common approach to idealise the temporal extended collision with surface contact by an impact of infinite short time with one-point-contact. In this paper the influence of this idealisation especially on the application of the conservation of angular momentum to vehicle-vehicle-collisions is discussed. At the end we present two new methods which make the definition of an idealised point of contact dispensable.

□

Inhaltsverzeichnis

- [1 Zitat](#)
- [2 Inhaltsangabe](#)
- [3 Anmerkungen](#)
 - [3.1 Anmerkungen von Plankensteiner](#)
 - [3.2 Richtigstellung von Hugemann, W.](#)
- [4 Umsetzung in GeoGebra](#)
- [5 Formelwerk](#)
- [6 Verfahren aus dem Hause Schimmelpfennig und Becke](#)
- [7 Weitere Infos zum Thema](#)

Zitat

[Schimmelpfennig, K.-H.](#); [Hebing, N.](#): Die Kontaktpunktproblematik in der Unfallrekonstruktion - Energie-Doppelring- und Drehimpuls-Spiegel-Verfahren. Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik 29 (1991), pp. 259 - 263 (#9)

Inhaltsangabe

Es werden zwei grafische Verfahren vorgestellt, die Energie- und Drallsatz in einer Weise anwenden, dass die Definition eines Kontaktpunktes entbehrlich wird. Bei der Anwendung des

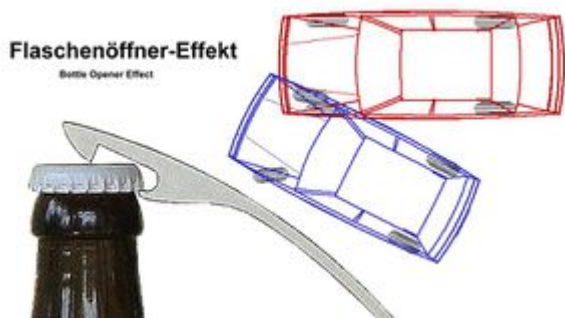
Energiesatzes werden darüber hinaus alle Annahmen betreffend Anstoßkonstellation und Stoßfaktor entbehrlich; stattdessen fließt vektorielle Trennungsgeschwindigkeit $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'$ in die Rechnung ein. Dies erlaubt die Anwendung des Verfahrens auch bei streifenden Stößen, wenn der Stoßfaktor nicht mehr sinnvoll eingegrenzt werden kann, wie in der Veröffentlichung an einem Unfallbeispiel illustriert.

Die Verfahren wurden bereits Jahre zuvor in [Mathematische Grundlagen und Arbeitsverfahren für die Kollisionsmechanik im forensischen Bereich](#) erarbeitet. Anlässlich von [Der Einfluß der Kontaktpunktlage beim Drall-Spiegelverfahren - das kontaktpunktvariierte Drallfeld](#) wurden diese Verfahren für eine Veröffentlichung aufgearbeitet.

Für die Berechnungen und Darstellungen in der Veröffentlichung wurde eine spezielle Version des Programms [WinKol](#) verwendet, die [Wilhelm Deppe](#) eigens für diese Veröffentlichung programmiert hatte (und dafür leider nur in einer Fußnote gewürdigt wird).

Anmerkungen

Anmerkungen von [Plankensteiner](#)



"verhakter" Stoß

Nachdem [Wilhelm Deppe](#) im Heft 3/1991 [über Probleme durch den Einfluss der Kontaktpunktlage](#) im Zusammenhang mit dem von [Schimmelpfennig](#) entwickelten [Drall-Spiegelverfahren](#) berichtet hatte, ist dieser nur sechs Monate später erschienene Beitrag offenkundig ein (eilig) erstellter Lösungsvorschlag. Dabei liegt das Problem keineswegs bei dem Lösungsverfahren selbst, sondern vielmehr an dem ebenen Ersatzmodell mit einem während der [Stoßzeit](#) unveränderlichen [Stoßpunkt](#), an dem die resultierende Stoßkraft angreift, und wie das nebenstehend dargestellte Schema eines (echten) verhakten Stoßes nach dem Prinzip eines Flaschenöffners zeigt, befindet sich der Stoßpunkt bei diesem Fall infolge der "Zugkräfte" zwischen den Vorderrädern außerhalb des Kontaktbereiches! Das eigentliche Problem ist der gewählte Begriff **Kontaktpunkt**, welcher einen Punkt innerhalb des Kontaktbereiches suggeriert.

Auch wenn es sich beim Flaschenöffnereffekt um einen sehr seltenen Sonderfall handelt (der in 35 Jahren singulär geblieben ist), es gibt noch eine Reihe weiterer Fälle ([bspw. hier](#)) bei denen das "übliche" Ersatzmodell nicht angewendet werden kann. Es ist daher keine *echte* Lösung des Problems, wenn auf dem gleichen Modell aufbauend bei ausreichenden Angaben die mathematische Überbestimmtheit des Gleichungssystems dazu benutzt wird, durch Umformungen der Gleichungen den Stoßpunkt zu *verstecken*, auch wenn diese *Vogel Strauß Politik* in Sonderfällen zu brauchbaren Lösungen führen kann.

Der Versuch die Ableitung der Gleichungen nachzuvollziehen gelang nur bis zur Gleichung (13), in der irgendetwas verloren gegangen sein muss; vielleicht kann die ausführliche und vollständige Ableitung dieser Gleichung hier nachgereicht werden.

Richtigstellung von [Hugemann, W.](#)

Was den eilig erstellten Lösungsvorschlag betrifft, liegt Kollege Plankensteiner falsch, siehe oben. Herr Schimmelpfnnig hat die Veröffentlichung von Deppe nur zum Anlass genommen, mich zu bitten, die dortigen Darlegungen zu einer Veröffentlichung auszuarbeiten.

Gleichung (13) fällt in der Veröffentlichung in der Tat ein wenig vom Himmel, ist in der Herleitung jedoch nicht weiter schwer. Wir schreiben den Energiesatz am besten in der Form

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) + m_2 (v_2^2 - v_2'^2) = 2 \Delta E_t$$

mit ΔE_t als Verlust an translatorischer kinetischer Energie, der den »Verlust« durch die stoßbedingte Umwandlung von Bahndrall in Eigendrall einschließt. Mit der Definition des Stoßantriebs können wir die Einlaufgeschwindigkeiten eliminieren

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \frac{1}{m_1} \vec{S}$$

und damit

$$v_1^2 = \left(\frac{1}{m_1} \vec{S} - \vec{v}_1' \right) \cdot \left(\frac{1}{m_1} \vec{S} - \vec{v}_1' \right) = \frac{1}{m_1^2} S^2 + v_1'^2 - \frac{2}{m_1} \vec{S} \cdot \vec{v}_1'$$

oder

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = \frac{1}{m_1} S^2 - \vec{S} \cdot \vec{v}_1'$$

und analog für v_2 , sodass sich in der Summe

$$\frac{1}{m_1} S^2 - \vec{S} \cdot \vec{v}_1' + \frac{1}{m_2} S^2 + \vec{S} \cdot \vec{v}_2' = \frac{1}{m^*} S^2 - 2 \vec{S} \cdot \Delta \vec{v} = 2 \Delta E_t$$

ergibt, was identisch mit Gl. (13) ist.

In der Veröffentlichung wird anstelle von S^2 stets \vec{S}^2 geschrieben, was $\vec{S} \cdot \vec{S}$ bedeutet und damit dasselbe ist. Das Skalarprodukt $\vec{S} \cdot \Delta \vec{v}$ ist in der Veröffentlichung ohne Punkt geschrieben.

Multiplizieren mit der relativen Masse

$$m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

und quadratisches Ergänzen ergibt dann

$$S^2 - 2 m^* \vec{S} \cdot \Delta \vec{v} + (m^* \Delta \vec{v})^2 = 2 m^* \Delta E_t + (m^* \Delta \vec{v})^2$$

und damit

$$(\vec{S} - m^* \Delta \vec{v})^2 = 2 m^* \Delta E_t + (m^* \Delta \vec{v})^2$$

Im Falle $\Delta \vec{v} = \vec{0}$ ergibt sich

$$S_0 = \sqrt{2 \cdot m \cdot \Delta E_t}$$

sodass man auch

$$(\vec{S} - m \cdot \Delta \vec{v}')^2 = S_0^2 + (m \cdot \Delta \vec{v}')^2$$

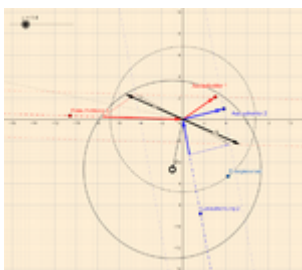
schreiben kann.

Hinweis 1: Im Falle von Drehungen ist $\Delta \vec{v}' = \vec{0}$ kein plastischer Stoß, denn gleiche Schwerpunktgeschwindigkeiten führen durch die Drehungen auf unterschiedliche Kontaktpunktgeschwindigkeiten.

Hinweis 2: m^* bezeichnet hier, wie man obiger Definition entnimmt, die »normale« relative Masse und nicht etwa die **reduzierte** relative Masse, wie sie analog aus den jeweils reduzierten Massen \bar{m}_i berechnet wird. Das ist insofern bemerkenswert, als dass über die reduzierte relative Masse wieder implizit auf die Anstoßkonstellation Bezug genommen würde. Insofern ist die hier vorgestellte Version des Energiesatzes tatsächlich frei von irgendwelchen Annahmen betreffend die Anstoßkonstellation.

Hinweis 3: Die Bezeichnung »Energie-Doppelring-Verfahren« ist eigentlich falsch. Es gibt nur einen Kreis oder Ring, über den der Betrag des Stoßantriebs abhängig von seiner Richtung definiert wird. Der Stoßantrieb für Fzg 2 ist schlicht dessen Gegenvektor $-\vec{S}$, und man kann sich das Spiegeln des Energierings sparen. Der Überlappung der Ringe kommt keine Bedeutung zu. Entsprechend wird in der GeoGebra-Konstruktion auf den zweiten Energiering (bzw. Kreis) verzichtet.

Umsetzung in GeoGebra



[GeoGebra-Projekt:
Energie-Doppelring-
Verfahren](#)

Um rein mit Impulsvektoren arbeiten zu können, muss der Vektor $\Delta v'$ durch die Auslaufimpulse beschrieben werden:

$$m \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_1') = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{m_2} \vec{p}_2' - \frac{1}{m_1} \vec{p}_1' \right) = \frac{1}{1 + \mu} (\vec{p}_2' - \mu \cdot \vec{p}_1')$$

mit $\mu = m_2/m_1$.

Der Trennungsimpuls $\vec{p}' = \vec{p}_2' - \vec{p}_1'$ und die Trennungsgeschwindigkeit $\vec{v}' = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'$ sind nur im Falle $\mu = 1$ kollinear, haben also im Regelfall also unterschiedliche Richtungen.

Die quadratische Addition $S_0^2 + (m \cdot \Delta \vec{v}')^2$ wird in Der GeoGebra-Konstruktion über eine rechtwinklige Dreiecks-konstruktion ausgeführt, indem der Kreis

mit dem Radius S_0 mit dem Strahl senkrecht zum Ortsvektor $m^* \Delta \vec{v}'$ des Kreismittelpunkts zum Schnitt gebracht wird.

Wie unterhalb der GeoGebra-Konstruktion erläutert, wird auf das Spiegeln zum Doppelkreis (bzw. -ring) verzichtet, weil den Schnittpunkten (bzw. -flächen) der Kreise (bzw. Ringen) keine Bedeutung zukommt, sodass man besser schlicht den Stoßantrieb spiegelt.

Formelwerk

Das Originalformelwerk aus der Veröffentlichung lautet:

Gl. (1) Impulserhaltung:
$$m_1 (\vec{v} - \vec{v}_1') = -m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_2')$$

Gl. (2) Energieerhaltung:
$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) + \Theta_1 (\omega_1^2 - \omega_1'^2) - \Delta E = -m_2 (v_2^2 - v_2'^2) - \Theta_2 (\omega_2^2 - \omega_2'^2) + \Delta E$$

Gl. (3) Drallsatz:
$$m_1 (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 - \vec{r}_1' \times \vec{v}_1') + \Theta_1 (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1') = -m_2 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 - \vec{r}_2' \times \vec{v}_2') - \Theta_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_2')$$

Gl. (4):
$$\frac{1}{v_1} \vec{v}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_{10} = \vec{r}_{1'}$$

$$\frac{1}{v_2} \vec{v}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{20} = \vec{r}_{2'}$$

Gl. (5):
$$\vec{\omega}_1 = 0, \quad \vec{\omega}_2 = 0$$

Gl. (6) Stoßantrieb:
$$\vec{S}_1 \stackrel{\text{doteq}}{=} \vec{S} = -m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = \int_0^t \vec{F}_1(t) dt$$

Gl. (7) »Rotationsantrieb«:
$$\vec{R}_1 \stackrel{\text{doteq}}{=} -\Theta_1 (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1') = \int_0^t \overline{\vec{p}_1}(t) \times \vec{F}_1(t) dt$$

Gl. (8):
$$\vec{F}_1 = \int_{\vec{p}_{1a}(t)}^{\vec{p}_{1b}(t)} \vec{f}_1(t, \vec{p}_1) dp_1$$

Gl. (9):
$$\overline{\vec{p}_1}(t) \times \vec{F}_1(t) = \int_{\vec{p}_{1a}(t)}^{\vec{p}_{1b}(t)} \vec{p}_1(t) \times \vec{f}_1(t, \vec{p}_1) dp_1$$

Gl. (10):
$$\vec{p}_{1k} \times \int_0^t \vec{F}_1(t) dt = \int_0^t \overline{\vec{p}_1}(t) \times \vec{F}_1(t) dt = \int_0^t \int_{\vec{p}_{1a}(t)}^{\vec{p}_{1b}(t)} \vec{p}_1(t) \times \vec{f}_1(t, \vec{p}_1) dp_1 dt$$

Gl. (11):
$$-\Theta_1 (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1') = \vec{p}_{1k} \times \int_0^t \vec{F}_1(t) dt = \vec{p}_{1k} \times \vec{S}$$

Gl. (12):
$$\vec{p}_{1k} - \vec{p}_{2k} = \vec{r}_{2k} - \vec{r}_{1k} \stackrel{\text{doteq}}{=} \vec{p}_k$$

Gl. (13) (aus (2), (1), (6) und (14)):
$$\frac{\vec{S}^2}{m^*} - 2 \vec{S} \Delta \vec{v}' = 2 \Delta E + \Theta_1 (\omega_1'^2 - \omega_1^2) + \Theta_2 (\omega_2'^2 - \omega_2^2)$$

Gl. (14):
$$\Delta \vec{v} \doteq \vec{v}_1' - \vec{v}_2'$$

Gl. (15):
$$(\vec{S} - m^* \Delta \vec{v})^2 = m^* [2 \Delta E + \Theta_1 (\omega_1'^2 - \omega_1^2) + \Theta_2 (\omega_2'^2 - \omega_2^2) + m^* \Delta \vec{v}^2]$$

Gl. (16):
$$\vec{M} = m^* \Delta \vec{v}$$

Gl. (17):
$$R^2 = m^* [2 \Delta E + \Theta_1 (\omega_1'^2 - \omega_1^2) + \Theta_2 (\omega_2'^2 - \omega_2^2) + m^* \Delta \vec{v}^2]$$

Gl. (18) (aus (11) und (12)):
$$\vec{p}_k \times \vec{S} = \Theta_1 (\vec{\omega}_1' - \vec{\omega}_1) + \Theta_2 (\vec{\omega}_2' - \vec{\omega}_2)$$

Gl. (19):
$$S_{\text{bot}} = \frac{\Theta_1 (\vec{\omega}_1' - \vec{\omega}_1) + \Theta_2 (\vec{\omega}_2' - \vec{\omega}_2)}{p_k}$$

Anmerkungen (--[Vdengineering \(Diskussion\)](#) 20:23, 17. Dez. 2015 (CET)):

- Gl. (1): hier fehlt wohl einmal der Index 1
- Gl. (13): hier muss der geneigte Leser für das nicht eingeführte m^* in [VKU-Ausgabe #9 1982](#) auf die Suche gehen. m^* wird dort als »relative Masse« eingeführt:
$$m^* = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$
 Siehe dort auch »reduzierte relative Masse«.
- Gl. (15): hier dürfte ein Index falsch sein.

Verfahren aus dem Hause Schimmelpfennig und Becke

- 1980 #10 [Ausnutzung der Symmetriebedingungen beim Impuls-Diagramm zur engeren Eingrenzung der Kollisionsgeschwindigkeiten unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Drallsatzes](#)
- 1982 #11 [Kollisionsgeschwindigkeitsberechnung bei eindimensionalen Fahrzeug/Fahrzeug-Kollisionen](#)
- 1983 #12 [Der eindimensionale nicht plastische Stoß; Erweitertes Band-Schnitt-Verfahren](#)
- 1982 #9 [Das Energie-Ring-Verfahren - Grafische Lösung der Stoßgleichung unter Einbeziehung der Formänderungsenergie](#)
- 1991 #3 [Der Einfluß der Kontaktpunktlage beim Drall-Spiegelverfahren - das kontaktpunktvariierte Drallfeld](#)
- 1991 #9 Die Kontaktpunktproblematik in der Unfallrekonstruktion - Energie-Doppelring- und Drehimpuls-Spiegel-Verfahren

Weitere Infos zum Thema